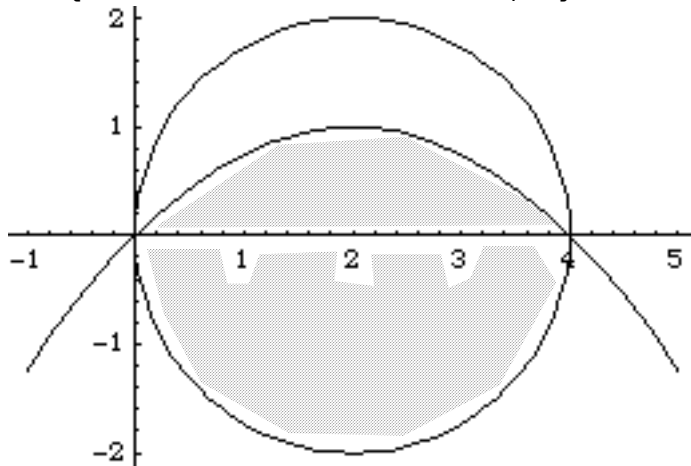


ESERCIZI SU ESTREMI ASSOLUTI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

(≥2005)

5) Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = xy^2$ nell'insieme

$$A = \left\{ (x,y); x^2 + y^2 - 4x \leq 0, y \leq x - \frac{1}{4}x^2 \right\}$$



Le derivate parziali di f sono $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$; esse sono entrambe nulle in tutti i punti del tipo $(x,0)$; in questi punti è $f(0,0) = 0$.

Studiamo f sulla frontiera di A . Questa è costituita dall'unione della semicirconferenza di centro $(2,0)$ e raggio 2, situata nel semipiano $y \leq 0$ (F_1) e dall'arco di parabola $y = x - \frac{1}{4}x^2$ con $0 \leq x \leq 4$ (F_2).

Su F_1 è $y^2 = 4x - x^2$, cosicché $f(x,y) = 4x^2 - x^3 \equiv p(x)$, con $0 \leq x \leq 4$.

Si ha $p(0) = 0$; $p(4) = 0$; $p'(x) = 8x - 3x^2$, che si annulla per $x = 0$ e $x = \frac{8}{3}$, entrambi compresi fra 0 e 4. Risulta

$$p\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{27} \approx 9,48.$$

Su F_2 è $y = x - \frac{1}{4}x^2$, cosicché

$$f(x,y) = x\left(x - \frac{1}{4}x^2\right)^2 \equiv q(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}x^5 \text{ con } 0 \leq x \leq 4. \text{ Si ha}$$

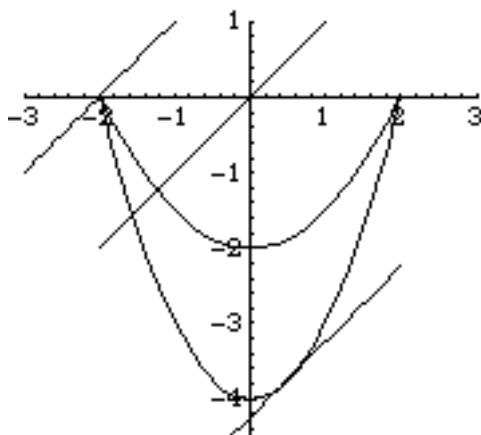
$$q(0) = q(4) = 0; \quad q'(x) = 3x^2 - 2x^3 + \frac{5}{16}x^4 = \frac{1}{16}x^2(5x^2 - 32x + 48); \quad q'(x) = 0$$

per $x = 0, \frac{12}{5}, 4$. Resta da calcolare soltanto $q\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{6912}{3125} \approx 2,2$.

In conclusione, il minimo ed il massimo valore di f in A sono rispettivamente 0 e $\frac{256}{27}$.

Calcolare il minimo ed il massimo di $f(x,y)=x-y$ nell'insieme

$$A=\left\{(x,y); x^2-4 \leq y \leq \frac{1}{2}(x^2-4)\right\}$$



A è la parte di piano fra le due parabole in figura; le linee di livello di f sono rette parallele alla bisettrice del primo quadrante, la quale (rappresentata in figura) corrisponde al livello $k=0$. Quando k cresce la retta $x-y=k$ trasla verso il basso; quindi il minimo ed il massimo di f in A si avranno, rispettivamente in corrispondenza della retta passante per $(-2,0)$ e della tangente alla parabola inferiore. La retta $x-y=k$ passa per $(-2,0)$ se $k=-2$; la retta del fascio $x-y=k$ tangente alla parabola $y=x^2-4$ ha come punto di tangenza il punto della parabola avente ascissa x in cui vale 1 la derivata di x^2-4 ; l'ascissa del punto di tangenza è $x=\frac{1}{2}$ e l'ordinata è $\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$; quindi la retta del fascio che è tangente alla parabola è quella passante per $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$, per la quale risulta $k=\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$. Il minimo e il massimo di f in A sono rispettivamente -2 e $\frac{17}{4}$.

1. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-10}{y+2}$ assume nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 16, x+2y \leq 18, x > 0\}$.
2. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-16}{y+8}$ assume nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 16, x+2y \leq 18, x > 0\}$.
3. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-7}{y-1}$ assume nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 16, 2x+y \geq 18, x > 0\}$.
4. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{y+1}{x-9}$ assume nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 16, 2x+y \geq 18, x > 0\}$.
5. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{y-16}{x+8}$ assume nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 16, 2x+y \geq 18, x > 0\}$.
6. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y)=x+2y$ nell'insieme $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 \leq 20, xy \leq -8, x > 0\}$

7. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 17, xy \geq 4, x > 0\}$
8. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 10, xy \geq 3, x < 0\}$
9. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \frac{x+y+3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq y \leq 5 - x^2\}$
10. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \frac{x-y+3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq y \leq 5 - x^2\}$
11. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \frac{x+y-3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq y \leq 5 - x^2\}$
12. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \frac{x+3y-3}{x-6}$ nell'insieme $A = \{(x,y); 1 \leq y \leq 9 - \frac{1}{2}x^2\}$
13. Determinare il minimo e il massimo di $f(x,y) = x^2 + xy + y - 7x$ in $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \leq y \leq x+2\}$
14. $f(x,y) = x^2 + xy + y - 7x$ in $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \leq y \leq x+2\}$
15. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ assume nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \frac{6}{x} \leq y \leq 4 - \frac{1}{2}x\}$
16. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ assume nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \frac{6}{x} \leq y \leq 8 - 2x\}$
17. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x + 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 40, xy \leq -12, x < 0\}$
18. Determinare il minimo e il massimo valore di $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 6y \leq 0, x - y + 3 \leq 0\}$
19. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = xy^2$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 + y^2 - 4x \leq 0, y \leq x - \frac{1}{4}x^2\}$
20. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x + y$ nell'insieme $A = \{(x,y); \frac{1}{2}(4 - x^2) \leq y \leq 4 - x^2\}$
21. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - y$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 - 4 \leq y \leq \frac{1}{2}(x^2 - 4)\}$
22. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = xy^2$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 + y^2 - 4x \leq 0, y \geq x - \frac{1}{4}x^2\}$